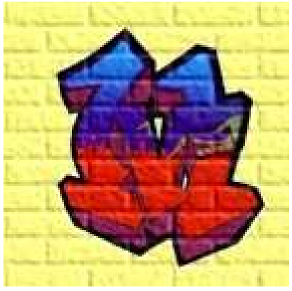
Matemática



4° año secundario

Aplicaciones de las matrices en diferentes situaciones

En una competición deportiva participan **50** atletas distribuidos en tres categorías: infantiles, cadetes y juveniles.

El doble del número de atletas infantiles, por una parte excede en una unidad al número de cadetes y por otra, coincide con el quíntuplo del número de juveniles.

Determiná el número de atletas que hay en cada categoría.

Solución:

Llamamos: **x** al número de atletas infantiles,
y al número de atletas cadetes,
z al número de atletas juveniles

Se verifica $\begin{cases} x+y+z=50 \\ 2x=y+1 \\ 2x=5z \end{cases} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=50 \\ y=2x+1 \\ z=\dfrac{2}{5}x \end{cases} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ si sustituimos en la primera ecuación la "y" y la "z" en función de "x" obtenemos $\Rightarrow x+2x-1+\dfrac{2}{5}x=50 \Rightarrow$ $17x=255 \Rightarrow$ x =15, sustituyendo se obtiene y = 29, z =6

Nota: también lo podríamos resolver aplicando el método de Gauss.

Se trata de conseguir una matriz triangular inferior de más fácil resolución...

El sistema es $\begin{cases} x+y+z=50 \\ 2x=y+1 \\ 2x=5z \end{cases}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$ ⇒La matriz es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$ → E_3-E_2 (para lograr el "0" en la ecuación (2)) ⇒ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$ → E_3 -2.E_1 (para lograr el "0" de la E_3) → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -100 \end{array}\right)$ →E_3-2.E_2 para el segundo "0" de la E_3→ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -17 & -102 \end{array}\right)$ resulta el sistema equivalente $\begin{cases} x+y+z=50 \\ -y+5z=1 \\ 17z=102 \end{cases}$ ⇒resolvemos cada una de las ecuaciones:

$17z=102 \Rightarrow z=\frac{102}{17} \Rightarrow z=6$ que reemplazamos en la ecuación $-y+5z=1 \Rightarrow -y+5.6=1 \Rightarrow 30-1=y \rightarrow 29=y$ ambos resultados los empleamos en la primera:
$x+y+z=50 \rightarrow x+29+6=50 \rightarrow x=50-29-6 \rightarrow x=15$

Te sugerimos comprobar los resultados, reemplazando cada variable por el valor obtenido.

Otra situación:

Encontrá los valores de **a** para que la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}$ **no sea inversible** y hallá **la inversa** para **a =1**.

Solución:

Para que sea **no inversible** el determinante debe dar 0. Entonces procedamos a calcular el determinante:

$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & a \end{vmatrix}$ = **(**2.5.a+3.4.4+1.7.1**)- (**1.5.4+3.1.a+4.7.2**)** = 0⇒

⇒**(**10.a+48+7**)- (**20+3a+56**)**=0⇒7a**-**21=0⇒a=3

Ahora calculemos la inversa para **a =1**,

Ahora calculá el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&5&7\\1&4&1\end{pmatrix}$.

¡Por favor no hagas trampa!
Debería darte -14

La adjunta es $\begin{pmatrix}-23&+4&7\\+15&-2&-7\\-13&-2&7\end{pmatrix}$ en consecuencia $A^{-1}=\frac{adj(A)^t}{\det(A)}$ sería

$$A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-23&+4&7\\+15&-2&-7\\-13&-2&7\end{pmatrix}^t}{-14}\Rightarrow A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-23&15&-13\\4&-2&-2\\7&-7&7\end{pmatrix}}{-14}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{23}{14}&-\frac{15}{14}&\frac{13}{14}\\-\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&\frac{1}{14}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Comprobá el resultado multiplicando A por su inversa, A^{-1}, y deberías obtener la matriz identidad. ($A.A^{-1}=I$).

Otro modelito de ejercicio:

Calculá la matriz **X** tal que **X.A-2B=C,** donde $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1&0\\3&-1\end{pmatrix}$

Solución:

X.A-2B =C $\Rightarrow$ **X.A=2B+C** $\Rightarrow$ **X.**$\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$

X$\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$**X.** $\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}\Rightarrow$**X=**$\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\end{pmatrix}^{-1}$

Buscá la inversa de la matriz A por el método que más te guste, resolvé esta cuestión antes de seguir,

La $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$ debería ser tu resultado, entonces ahora resolvé el producto de las matrices $\begin{pmatrix}-1&2\\5&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$

De donde decimos que $X=\begin{pmatrix}9&-5\\-23&14\end{pmatrix}$

Discutí y resolvé el siguiente sistema en los casos posibles:

$$\begin{cases}x+y+z=0\\3x+2y+kz=5\\2x+y+z=3\end{cases}$$

Solución:

Como el parámetro **k** solo está en una ecuación y en la **z**, el método de Gauss en este caso nos parece el más conveniente.

Cambiamos el orden de las ecuaciones para más sencillez:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & k & 5 \end{array}\right) \Rightarrow E_2\text{-}2.E_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & k & 5 \end{array}\right) \Rightarrow E_3\text{-}3E_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & k-3 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow E_3\text{-}E_2 \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & k-2 & 2 \end{array}\right)$$, que es equivalente al sistema: $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-z=3 \\ (k-2)z=2 \end{cases}$$

Discusión

Si **k-2≠0**, es decir si k distinto de 2, entonces podremos despejar el valor de z de la ecuación (k-2).z=2; porque al ser distinto de cero lo podemos "pasar" dividiendo al otro miembro, resultaría entonces:

$(k-2)z = 2 \Rightarrow z = \dfrac{2}{k-2}$ por lo que el **sistema es compatible determinado** (solución única).

Las otras incógnitas quedarían en función del valor que le demos a "k"

$y = -3 - \dfrac{2}{k-2} = \dfrac{-3k+6-2}{k-2} = \dfrac{-3k+4}{k-2}$

$x = \dfrac{-3k+4}{k-2} - \dfrac{2}{k-2} = \dfrac{-3k+2}{k-2}$

Si **k-2=0**, es decir k =2, quedaría 0.z=2, y no existe ningún número que al multiplicar por "0" dé como resultado "2", el **sistema sería incompatible**.

Último modelito…

El jueves pasado la heladería "*SEAD*" por una copa de la casa, dos cucuruchos y cuatro batidos cobró $34.

El viernes por la tarde, por 4 copas de la casa y 4 cucuruchos nos cobró $44, y el sábado me pidieron $26 por un cucurucho y 4 batidos.

¿Tenés motivos para pensar que alguno de los tres días nos han presentado una cuenta incorrecta?

Planteo:

Llamamos **x** al precio de la copa de la casa
y al precio del cucurucho
z al precio del batido

Traduciendo las indicaciones del texto, tenemos:

E_1: x +2y+ 4z=34

E_2: 4x+ 4y =44, simplificando x + y = 11
E_3: y +4z=26

Nuestra matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculá la inversa de la matriz.

b) Resolvé la ecuación $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 11 \\ 26 \end{pmatrix}$

b) Resolvé la ecuación **X.A-C=2B**, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución punto a):

Vamos a usar la fórmula $A^{-1} = \frac{adj(A)^t}{\det(A)}$. Entonces primero calculamos el determinante de A para comprobar que en efecto existe la inversa.

Recordá que si el determinante fuera “0” no tiene inversa.

det(A)= $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right|$ =**(**1.1.3+1.1.4+0.2.0**)**- **(**4.1.0+0.2.1+3.2.1**)**= -1, distinto de “0”,

$\begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

luego existe la inversa.

Después calculamos la matriz adjunta de A, cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de A.

$$adj(a)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&4\\0&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&4\\1&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&4\\1&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj A}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2&3&-1\\-4&4&-1\end{pmatrix}$$

, después trasponemos la matriz adjunta $adj(A)^t=\begin{pmatrix}3&-2&-4\\-3&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

y por último dividimos por el determinante.

Nos queda: $A^{-1}=\dfrac{(Adj,A)^t}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix}3&-2&-4\\-3&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-3&2&4\\3&-3&-4\\-1&1&1\end{pmatrix}$

Solución punto b):

$A.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34\\11\\26\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&1&0\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34\\11\\26\end{pmatrix}$ ⇒si multiplicamos por A^{-1} ambos miembros de la ecuación, resulta $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2&4\\3&-3&-4\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}34\\11\\26\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-35\\3\end{pmatrix}$

⇒ Llamamos **x** al precio de la copa de la casa = \$24
y al precio del cucurucho= \$-35 **¡Imposible!**
z al precio del batido= \$3

Es imposible que el precio del cucurucho sea \$-35 , por lo tanto uno de los días nos hicieron mal la cuenta.

Solución punto c):

Con tantas cosas que calculamos quizás te olvidaste de qué se trata este punto. Para resolver la ecuación **X.A-C=2B** tendríamos que calcular la matriz **X,** despejaremos, primero sumamos **C** a ambos miembros, y obtenemos:**XA =2B+ C**, como la matriz **A** tiene inversa (apartado a), la multiplicamos a ambos lados para despejar la **X**:

XA .A^{-1}= (2B+ C). A^{-1}, de donde: **X = (2B+ C).A^{-1}**

Calculamos pues, **2B+ C**:

(2B+ C)= $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, multiplicamos por la inversa de A:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -16 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -21 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

Actividades

Actividad 1

En una reunión hay 40 personas, formadas por mujeres, hombres y niños. La suma del número de hombres y mujeres triplica el número de niños. El número de mujeres es igual a la suma del número de hombres más el número de niños. Averiguá razonadamente cuántos hombres, mujeres y niños hay.
Usá el método de Gauss-Jordan.

Actividad 2

Considerá la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 2 & m^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determiná los valores de **m** para los que el **determinante de A sea cero.**

b) Resolvé para **m = 1** el sistema $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Calculá A^{-1} para **m=-1** utilizando el método que prefieras.

Actividad 3

Compré **100** regalos de diferentes precios, **25** pesos, **5** y **0.25** y gasté en total **500** pesos, ¿cuántos regalos he comprado de cada cantidad exactamente?

CLAVE DE LAS ACTIVIDADES